LUCIANO TARSIA
84/19

1	2	3
B=	B	B

P

8+

Lógica y Computabilidad
Segundo Cuatrimestre de 2022
Parcial de lógica

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Resolver cada ejercicio en hojas distintas.
Poner nombre y LU en todas las hojas.
El examen es a libro abierto. Pueden usar lo demostrado en clase o en ejercicios de las guías poniendo referencias claras y precisas de dónde viene.
Justificar todas las respuestas.

Ejercicio 1. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea C un conjunto no adecuado de conectores lógicos. Entonces existe un conjunto $C' \supsetneq C$ tal que C' es adecuado.

b) Sea Γ un conjunto maximal consistente de fórmulas de la lógica proposicional. Entonces existe $\Gamma' \subsetneq \Gamma$, un subconjunto estricto de Γ, tal que $\mathrm{Con}(\Gamma') = \Gamma$.

c) Sea A un conjunto infinito de fórmulas de la lógica proposicional que cumple que para toda $\alpha \in A$, o existe una $p \in \textsc{Prop}$ tal que $\alpha = p$, o existe $p \in \textsc{Prop}$ y $\beta \in A$ tal que $\alpha = \beta \wedge p$. Entonces toda fórmula $\alpha \in A$ es de la forma $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ para cierto n y ciertos $p_1, \ldots, p_n \in \textsc{Prop}$ (dependientes de α).

Ejercicio 2. Considerar $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de función binario r, y un símbolo de constante c. Sea SQR la axiomatización que extiende a SQ con las (infinitas) siguientes fórmulas:

R1 $\forall x\, (r(x, c) = x)$
R2 $\forall x \exists y\, (r(x, y) = c)$
R3i $\exists x_1 \ldots \exists x_i\, (todosDistintos(x_1, \ldots, x_i))$ para $i \geq 2$

(Donde *todosDistintos* es una abreviación para la fórmula que expresa que todas las variables indicadas son distintas entre sí).

Demostrar que SQR es correcta pero no es completa con respecto a la estructura $\langle \mathbb{Z}, -, 0 \rangle$ (donde $-$ y 0 son la resta y el cero usuales de los enteros).

Aclaración: para ver si una fórmula es verdadera, no es necesario hacer toda su derivación semántica; consideramos suficiente explícitar cuál su interpretación semántica en la estructura y valuación considerada, y luego justificar por qué vale o no allí.

Ejercicio 3. Decimos que dos funciones unarias f_1, f_2 se *intersecan* en x si $f_1(x) = f_2(x)$.

Sea $\mathcal{L} = \{=, g, h\}$ un lenguaje con igualdad y con dos símbolos de función unaria: g y h. Sea K la clase de $\mathcal{L}$-estructuras en las cuales g y h intersecan en infinitos puntos.

Demostrar que K no es definible en $\mathcal{L}$.

LUCIANO TARSIA
84/19

HOJA Nº 1
FECHA 18/11

(1)
a) QVQ SEA C UN CONJUNTO NO ADECUADOS DE CONECTORES LÓGICOS, EXISTE C', TAL QUE $C \subseteq$ EN C' Y C' ADECUADO.

DEMUESTRO ESTO X CONSTRUCCIÓN

SEA C UN CONJUNTO DE CONECTORES NO ADECUADOS, DEFINO $C' = \{\neg, \wedge, \vee\} \cup C$

POR EL EJERCICIO 5, a DE LA PRÁCTICA 4, SABEMOS QUE $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ES ADECUADO.

(*) C' ES ADECUADO

(*) NOTAR QUE SE PUEDE HACER ESTA IMPLICACIÓN, YA QUE AL SER $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ADECUADO PODEMOS REPRESENTAR CUALQUIER FUNCIÓN BOOLEANA CON LOS CONECTORES. SI AGREGAMOS CONECTORES, ENTONCES VAMOS A SEGUIR PUDIENDO REPRESENTAR CUALQUIER FUNCIÓN BOOLEANA. ✓

b) Γ MAXIMAL CONSISTENTE DE FÓRMULAS DE LÓGICA PROP.

QVQ EXISTE $\Gamma' \subsetneq \Gamma$, TAL QUE $CON(\Gamma') = \Gamma$.

LO MUESTRO X CONSTRUCCIÓN.

SEA $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi$

$\Rightarrow$ EXISTE UNA CADENA FINITA Y NO VACÍA $\varphi_1 \dots \varphi_n$ DE FÓRMULAS QUE CUMPLEN:
- φ_i AXIOMA O
- $\varphi_i \in \Gamma$ O
- φ_i CONSECUENCIA INM.

DEFINICIÓN
$CON(\Gamma) = \{\varphi / \Gamma \models \varphi\}$

DEFINO $\Gamma' = \Gamma - \{\varphi\}$ (CON - DENOTANDO QUE ELIMINO φ DEL CONJ.)

$\Gamma' \vdash \varphi$ XQ Γ' TIENE TODAS LAS φ_i QUE FORMAN PARTE DE SU DERIVACIÓN. ¿QUÉ PASA SI ESTABA φ EN SU DERIVACIÓN?

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ LAS CONSECUENCIAS SINTÁCTICAS DE Γ' SON LAS MISMAS QUE LAS DE Γ.

NOTA

Y POR ~~COMPLETITUD~~ CORRECTITUD FUERTE DE SQ.

$CON(\Gamma) = CON(\Gamma')$

$\Leftrightarrow \quad \Gamma = CON(\Gamma')$.

ESTO X SER Γ M.C.

$\Rightarrow \Gamma' \subsetneq \Gamma$ Y $CON(\Gamma') = \Gamma$. X

UNA DERIVACIÓN TRIVIAL DE φ A PARTIR DE Γ ES: φ PORQUE $\varphi \in \Gamma$ Y ESTO NO PUEDE HACERSE EN Γ'.

c) LO PRUEBO X INDUCCIÓN EN EL LARGO DE LA FÓRMULA.

CB $n=1$. SEA $\alpha \in A$.

$\alpha = p$ CON $p \in PROP$

α ES DE LA FORMA $p_1 \wedge \dots \wedge p_n$ ✓✓

HI SUPONGO QUE LA PROPIEDAD VALE PARA $\beta \in A$ (β DE LARGO $\leq n$)

QVQ VALE PARA α DE LARGO $n+1$

X DEFINICIÓN $\alpha = p$ (EN ESTE CASO VALE LA PROPIEDAD)

O $\alpha = p \wedge \beta$.

SI $\alpha = p \wedge \beta$ POR HI $\alpha = p \wedge p_1 \dots \wedge p_n$

$\Rightarrow \alpha$ CUMPLE LA PROPIEDAD. ✓

LUCIANO TARSIA | HOJA N° 2
84/19 | FECHA 18/11

(2) LLAMO M A LA ESTRUCTURA $\langle \mathbb{Z}, -, 0 \rangle$

DICHO ESTO, VOY A DAR LA INTERPRETACIÓN SEMÁNTICA DE LOS AXIOMAS EN M.

(*)₁ R1: DICE QUE PARA TODO ENTERO X, RESTARLE CERO A X ES IGUAL A X $(X-0=X)$.

R2: DICE QUE PARA TODO X (ENTERO) EXISTE UN Y (ENTERO) TAL QUE X MENOS Y ES CERO $(X-Y=0)$.

R3i: DICE QUE EXISTEN i ENTEROS DISTINTOS.

* QVQ SQR ES CORRECTA RESPECTO A M.
SI $\vdash_{SQR} \varphi \Rightarrow M \models \varphi$

SUPONGAMOS $\vdash_{SQR} \varphi \Rightarrow \{R1, R2, R3_i\} \vdash_{SQ} \varphi$

$\xRightarrow{\text{x CORRECTITUD F.}} \{R1, R2, R3_i\} \models \varphi$

SI PROBAMOS QUE $M \models \{R1, R2, R3_i\} \Rightarrow M \models \varphi$.

PERO POR LO EXPLICADO EN (*)₁ Y LAS CARACTERÍSTICAS DE M, SE CUMPLE QUE $M \models \{R1, R2, R3_i\}$.

R1 SE CUMPLE EN LOS ENTEROS $(\forall x \in \mathbb{Z} : x-0=x)$.
R2 SE CUMPLE YA QUE $\forall x \in \mathbb{Z} \ \ x-x=0$
R3 SE CUMPLE YA QUE $\mathbb{Z}$ TIENE INF. ELEMENTOS DISTINTOS

$\Rightarrow M \models \varphi$
$\rightarrow$ SQR ES CORRECTA RESPECTO A M □ ✓

* QVQ SQR NO ES COMPLETA RESPECTO A M

PARA ESTO DEFINO $\varphi = \forall x (x \neq c \rightarrow R(c,x) \neq c)$

Y TAMBIÉN DEFINO A COMO LA ESTRUCTURA $\langle \mathbb{N}, -, 0 \rangle$

CON $-$ SIENDO LA RESTA DENTRO DE LOS NATURALES $(\text{SI } x-y \text{ CON } x \leq y \Rightarrow x-y=0)$ Y 0 LA INTERPRETACIÓN DEL CERO EN LOS NATURALES.

NOTA

PODEMOS VER QUE R1, R2 Y R3 SON VÁLIDAS EN A.

R1: RESTARLE CERO A TODO NATURAL X ES IGUAL A X

R2: POR LA INTERPRETACIÓN DE LA RESTA,

SI $x, y \in \mathbb{N}$ Y $x \leq y \Rightarrow x - y = 0$

R3: HAY INFINITOS NATURALES DISTINTOS.

PERO φ NO VALE EN A, YA QUE SI AL CERO LE RESTAMOS UN NATURAL, EL RESULTADO ES CERO (X LA INTERPRETACIÓN DE LA RESTA EN A).

Y φ SÍ VALE EN M, YA QUE SI HACEMOS $0 - x$ CON $x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 \Rightarrow 0 - x \neq 0$.

TENEMOS ENTONCES QUE $M \models \varphi$. SUPONGAMOS QUE SQR FUESE COMPLETA RESPECTO A M. ENTONCES VALDRÍA QUE $SQR \vdash_{SQ} \varphi$ Y POR CORRECTITUD FUERTE DE SQ VALE $SQR \models \varphi$ LO CUAL NO ES CIERTO (XQ $A \models SQR$ PERO $A \models \varphi$).

$\Rightarrow$ SQR NO ES COMPLETA RESPECTO A M $\square$

LUCIANO TARSIA
84/19

HOJA N° 3
FECHA 18/11

③ ~~[illegible]~~

SUPONGAMOS QUE LA PROPIEDAD ES DEFINIBLE Y LO HACEMOS CON LA FÓRMULA φ

SI ESTO ES ASÍ, ENTONCES TAMBIÉN ~~[illegible]~~ ES EXPRESABLE LA PROPIEDAD QUE AFIRMA QUE g Y h SE INTERSECTAN EN FINITOS PUNTOS.

ESTO ÚLTIMO LO HACEMOS CON LA FÓRMULA $\varphi' = \neg\varphi$

$\boxed{*}$ VEAMOS φ' NO ES EXPRESABLE.

DEFINO:

φ'_1 $\exists x\ (g(x) = h(x))$. "g Y h INTERSECCIONAN EN AL MENOS 1 PUNTO"

φ'_2 $\exists x, y\ (x \neq y \wedge g(x) = h(x) \wedge g(y) = h(y))$

$\vdots$ "g Y h INTERSECCIONAN EN AL MENOS 2 PUNTOS"

φ'_m $\exists x_1 \dots x_m$ (TODOSDISTINTOS$(x_1 \dots x_m) \wedge g(x_1) = h(x_1) \wedge \dots \wedge g(x_m) = h(x_m)$)

"g Y h INTERSECCIONAN EN AL MENOS m PUNTOS"

CON ESTO DEFINO: $\Gamma = \{\varphi'\} \cup \{\varphi'_1 \dots \varphi'_i \dots\}$

⊞ **VEAMOS** QUE Γ ES ~~[illegible]~~ INSATISFACIBLE ~~[illegible]~~
PARA QUE SEA SATISFACIBLE SE DEBE CUMPLIR φ'

ES DECIR, DEBE EXISTIR UN k, TAL QUE g Y h INTERSECAN EN k PUNTOS

PERO SI ESTO ES ASÍ LAS FÓRMULAS φ_i CON $i > k$ NO VAN A VALER

$\Rightarrow \Gamma$ ES INSATISFACIBLE.

⊞ AHORA VEAMOS QUE Γ ES SATISFACIBLE X COMPACIDAD.

X COMPACIDAD VALE QUE SI TODO $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ FINITO ES SATISFACIBLE, ENTONCES Γ TAMBIÉN LO ES.

TOMO $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ FINITO Y VEO QUE ES SATISFACIBLE.
TOMO $MAX = (\{ i \geq 1 : \varphi_i \in \Gamma_1 \} \cup \{1\})$.
SE PUEDE CONTRUIR UN MODELO (M) DONDE h Y g SE INTERSECAN MAX VECES. FALTA CONSTRUIRLO EXPLICITAMENTE

~~[illegible]~~ ASÍ, Γ_1 ES SATISFACIBLE POR M.
YA QUE VALEN TODAS LAS φ_i ~~[illegible]~~ QUE PERTENEZCAN A Γ_1 Y SI $\varphi' \in \Gamma_1$ TAMBIÉN VA A VALER, YA QUE h Y g INTERSECAN EN FINITOS ~~[illegible]~~ PUNTOS EN EL MODELO M (EN MAX PUNTOS EXACTAMENTE).

~~[illegible]~~ ESTO SE PUEDE HACER PARA TODO $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ FINITO.
$\Rightarrow$ X COMPACIDAD, Γ ES SATISFACIBLE.

<u>ABS</u> Γ NO PUEDE SER AMBAS: SATISFACIBLE Y NO SATISFACIBLE.

EL ABS VINO DE SUPONER QUE K ES DEFINIBLE EN L.
$\Rightarrow$ K <u>NO</u> ES DEFINIBLE EN L. □

<u>ACLARACIÓN</u>: EN ALGUNOS LUGARES INTERCAMBIO LAS PALABRAS EXPRESABLES Y DEFINIBLES. EN EL APUNTE DE "COMPACIDAD E INEXPRESABILIDAD" SE ACLARA QUE REFIEREN A LO MISMO.